UHCE 854

SESSION 2008

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants les uns des autres et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du présent sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes. *Il est demandé de numéroter soigneusement les réponses.*

Enfin, le jury rappelle qu'il sera fait grand cas de la qualité et de la précision de la rédaction lors de la notation.

Exercice I

On considère dans cet exercice un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, et on cherche à caractériser les endomorphismes u de E tels que

$$u \circ u = -\mathrm{id}_E$$

où id_E désigne l'application identité de E. On utilisera la notation $u^2 = u \circ u$.

1. Soit u tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$. Quelles sont les valeurs propres de u^2 ? L'endomorphisme u admet-il des valeurs propres ?
2. Lorsque $n = 1$, montrer que tout endomorphisme de E est de la forme $\lambda\,\mathrm{id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme u tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ dans ce cas.
3. On considère dans cette question le cas $n \in \{2, 3, 4\}$ et on suppose, pour commencer, qu'il existe un endomorphisme u tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$. Soit un élément x de E, non nul : montrer que $(x, u(x))$ forme un système libre.
   On pourra par exemple considérer deux réels λ, μ tels que $\lambda x + \mu u(x) = 0$ et en tirer que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$.
4. En déduire, lorsque $n = 2$, une représentation matricielle de tout u qui vérifie $u^2 = -\mathrm{id}_E$; et préciser alors tous les endormorphismes u tels que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.
5. On passe ici au cas $n = 4$.
   (a) On suppose à nouveau, pour commencer, qu'il existe u tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ et on considère un élément x de E, non nul. Montrer qu'il existe un élément y de E tel que $(x, u(x), y, u(y))$ forme une base de E.
   (b) Préciser alors tous les endormorphismes u tels que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.
6. Montrer que si pour $n = 3$, il existait un endormorphisme u sur E tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$, alors il existerait un système libre à quatre éléments dans E. En déduire qu'il n'existe donc pas de tel endormorphisme.

Exercice II

On considère dans tout l'exercice quatre variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p, avec $p \in [0,1]$. On note M la matrice (aléatoire)

$$M = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{bmatrix}.$$

1. Combien de valeurs la matrice M peut-elle prendre ?
   Déterminer également la probabilité que M soit la matrice nulle.
2. On veut calculer la probabilité q que M soit inversible.
   (a) Calculer q lorsque $p = 0$ ou $p = 1$.
   (b) Soit a_1, a_2, a_3, $a_4 \in \{0,1\}$. Prouver que la matrice
   $$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$
   est de rang 2 si et seulement si aucune de ses colonnes n'est nulle et que les deux colonnes sont différentes.
   (c) Montrer alors que la probabilité q que M soit inversible vaut $q = 2p^2(1-p^2)$.
   (d) En déduire que $q \leq \min\{p, 1/2\}$.
   On pourra commencer par prouver que $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. On considère maintenant une suite X_1, X_2, X_3, ... de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$; et pour tout entier $k \geq 1$, on note
   $$M_k = \begin{bmatrix} X_{4(k-1)+1} & X_{4(k-1)+3} \\ X_{4(k-1)+2} & X_{4(k-1)+4} \end{bmatrix}.$$
   Par exemple, $M_1 = M$ et
   $$M_2 = \begin{bmatrix} X_5 & X_7 \\ X_6 & X_8 \end{bmatrix}.$$
   (a) Montrer que $M_1 M_2 \ldots M_n$ est inversible si et seulement si chacune des matrices M_j l'est, pour $j = 1, \ldots, n$.
   (b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité que $M_1 M_2 \ldots M_n$ soit inversible. Indiquer la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.

Problème

On note, pour tout entier $k \geq 1$,

$$k! = k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \ ;$$

par convention, $0! = 1! = 1$. On définit le coefficient combinatoire C_n^k pour deux entiers $n \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$ comme

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ .$$

On a alors la formule du binôme : pour tous nombres complexes x et y et tout entier $n \geq 1$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, y^{n-k} \ .$$

Enfin, on rappelle la formule de Moivre : pour tout réel θ et tout entier $n \geq 1$,

$$\big(\cos\theta + i \sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} \ .$$

Partie 1 (préliminaires)

1. Montrer que pour tout réel θ, on a $\cos(2\theta) = 2\,(\cos\theta)^2 - 1$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} \, (\cos\theta)^{n-2k} \, \big((\cos\theta)^2 - 1\big)^k$$

   où $\lfloor n/2 \rfloor$ est la partie entière inférieure de $n/2$, *id est*, le plus grand entier inférieur ou égal à $n/2$.
3. Montrer que pour tous réels a et b, on a $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \, \cos b$.

Partie 2 (introduction des polynômes objets de l'étude)

On considère dorénavant l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à coefficients réels ; c'est-à-dire que pour toute fonction P de $\mathbb{R}[X]$, il existe un entier naturel $n \geq 0$ et $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ .$$

On rappelle que le plus petit entier n tel que l'écriture ci-dessus soit valable est appelé le degré de P, et que le coefficient a_n correspondant est le coefficient dominant de P. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on note alors $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ (on ne demande pas de redémontrer la valeur de cette dimension).
2. Exhiber un élément P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel θ, on a $\cos(2\theta) = P(\cos\theta)$; indiquer son degré et son coefficient dominant.
3. De manière plus générale, soit $n \geq 0$ un entier naturel. Donner un élément P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel θ, on a $\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$.
4. On fixe dans cette question un entier naturel $n \geq 0$. Montrer que s'il existe un autre Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel θ, on a $\cos(n\theta) = Q(\cos\theta)$, alors $Q = P_n$.

On peut donc dorénavant parler, pour tout entier naturel $n \geq 0$, de l'unique fonction polynômiale P_n vérifiant que pour tout réel θ, on a $\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$.

5. Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3.
6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2\,x\,P_n(x) \ .$$
7. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
8. Montrer que $\big(P_0, \ldots, P_n\big)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 3 (étude des variations de ces polynômes)

On fixe, dans cette partie et les suivantes, l'entier $n \geq 1$ et on notera donc P le polynôme P_n défini dans la partie précédente.

Pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on pose
$$r_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \ ;$$
et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note $r'_k = \cos(k\pi/n)$.

1. Montrer que les r_k sont exactement les racines de P.
2. Prouver (sans calculs supplémentaires) que la dérivée P' de P s'annule exactement $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$, et ceci uniquement sur l'intervalle $]-1,1[$.
3. Montrer que les racines de P' sont données par certains des r'_k (préciser lesquels). On pourra montrer au préalable que $\theta \mapsto P(\cos\theta)$ est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Que valent les $P(r'_k)$?
5. Montrer finalement que $|P|$ admet un maximum sur $[-1,1]$, et qu'il est donné par
$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| = 1 \ .$$

Partie 4 (approximation d'une fonction régulière)

On fixe n réels de $[-1,1]$, deux à deux distincts, et on les note $u_1, \ldots, u_n$. Pour tout entier $m \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la fonction L_m sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_m(x) = \frac{x-u_1}{u_m-u_1} \cdots \frac{x-u_{m-1}}{u_m-u_{m-1}} \frac{x-u_{m+1}}{u_m-u_{m+1}} \cdots \frac{x-u_n}{u_m-u_n} = \prod_{k \neq m} \frac{x-u_k}{u_m-u_k} .$$

On fixe également une fonction f de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable n fois, et dont la dérivée n–ième, notée $f^{(n)}$, est continue.

1. Montrer que pour tous entiers naturels m et j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $L_m(u_j) = 1$ si $j = m$ et $L_m(u_j) = 0$ sinon.
2. Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer qu'il existe un unique Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $Q(u_k) = f(u_k)$. (On pourra écrire Q sur la base des L_m.)
4. On veut montrer que pour tout x de $[-1,1]$, il existe c dans $[-1,1]$ tel que

$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{1 \leq k \leq n} (x - u_k) .$$

   (a) Montrer que c'est vrai lorsque x est l'un des u_k.

   (b) On suppose dorénavant que x n'est pas l'un u_k et on définit g_x de la manière suivante : pour tout $t \in [-1,1]$,

$$g_x(t) = f(t) - Q(t) - \big(f(x) - Q(x)\big) \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{t-u_k}{x-u_k} .$$

   Montrer que la dérivée n–ième de g_x existe et la calculer ; on la note $g_x^{(n)}$.

   (c) Trouver $n+1$ points où g_x s'annule.

   (d) Montrer qu'il existe un point c de $[-1,1]$ tel que $g_x^{(n)}(c) = 0$ et conclure à la propriété recherchée.
5. Montrer alors que

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{n!} \left(\max_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n)}(x) \right| \right) \left(\max_{x \in [-1,1]} |U(x)| \right)$$

   où la fonction U est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} (x - u_k) .$$

Partie 5 (meilleure approximation au sens précédent)

On aimerait avoir la meilleure approximation uniforme possible de f par Q, et la partie précédente montre qu'il s'agit de chercher les u_k tels que

$$M_U = \max_{x \in [-1,1]} |U(x)|$$

soit le plus petit possible. On va introduire pour l'étude la fonction réelle R,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - r_k) \ .$$

(On rappelle que les r_k ont été définis à la partie 3.)

1. Montrer que le maximum M_R de $|R|$ existe sur $[-1, 1]$ et vaut 2^{1-n}.
2. Prouver que $U - R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Supposons que l'on ait choisi les u_k de telle sorte que $M_U < 2^{1-n}$.
   (a) Montrer que $U(r'_k) - R(r'_k)$ est strictement positif lorsque k est impair et strictement négatif sinon.
   (b) En déduire que $U = R$, et que donc un tel choix des u_k n'existe pas.
4. Quel est, au final, un choix des $u_1, \ldots, u_n$ minimisant M_U ?