PROBLÈME A. Les deux premières parties qui suivent sont indépendantes entre elles, la troisième partie utilise des résultats des parties précédentes.

Première partie : étude d'une fonction de deux variables. On introduit la fonction de deux variables

$$\begin{array}{rcl} d :]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u \ln\left(\dfrac{u}{v}\right) - u + v\,. \end{array}$$

(1) Calculer les dérivées partielles de d par rapport à u et par rapport à v.

(2) On définit la fonction f par $f(x) = d(x,1)$.

(a) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.

(b) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

(3) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x\ln(x) \geq x-1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

(4) En déduire que, pour tout u, $v > 0$, $d(u,v) \geq 0$ et que $d(u,v) = 0$ si et seulement si $u = v$.

(5) Soient u et v deux réels positifs fixés. Montrer que

$$d(u,v) = \max_{x\in\mathbb{R}} \left\{ xu - v\left(e^x - 1\right) \right\}.$$

À quelle condition le maximum est-il atteint en un réel x strictement positif ?

Seconde partie : transformée de Laplace. Soit Z une variable aléatoire. Pour tout réel x tel que l'espérance de la variable aléatoire e^{xZ} est finie, on définit

$$\Phi_Z(x) = \mathbb{E}\left[e^{xZ}\right].$$

(6) *Étude de cas particuliers.*

(a) Calculer explicitement $\Phi_Z(x)$ lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

(b) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \Phi_Z(x) = \lambda(e^x - 1)$.

Dans la suite de cette partie, Z désigne une variable aléatoire pour laquelle la fonction Φ_Z est définie sur $\mathbb{R}$.

(7) Montrer que Φ_{-Z} est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer en fonction de Φ_Z.

(8) Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(Z > u) \leq \exp(-xu)\,\Phi_Z(x).$$

Soit $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z. On pose

$$\overline{Z}_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}.$$

(9) Exprimer $\Phi_{n\overline{Z}_n}(x)$ en fonction de Φ_Z, x et n.

(10) En déduire que, pour u fixé et pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\overline{Z}_n > u\right) \leq \exp\left(-n\left[xu - \ln \Phi_Z(x)\right]\right).$$