Devoir surveillé 2

Toutes les copies doivent être numérotées et porter le nom de l'élève. Les résultats doivent être encadrés.

Problème 1 – Médiane poissonnienne

Préliminaires d'analyse

Il s'agit d'abord d'étudier la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \exp(-n)\dfrac{n^n}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{4}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\Big(n \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - 1\Big)$
3. Déduire des deux questions précédentes la nature de la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.
4. Conclure sur la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ puis sur la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Probabilités

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note P_n la fonction définie pour tout réel λ par $P_n(\lambda) = \exp(-\lambda)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda)\Big(1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\Big)$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que P_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout réel λ, $P_n''(\lambda) = \exp(\lambda)\,\dfrac{\lambda^{n-1}}{n!}\,(\lambda - n)$ où P_n'' est la dérivée seconde de P_n.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$ où P_n' est le polynôme dérivé de P_n.
3. Soit Q une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a
   $$Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t)\,Q''(t)\,\mathrm{d}t.$$
   b. En appliquant l'égalité précédente à P_n, démontrer que la suite $(P_n(n))$ est décroissante.
   c. En appliquant la même égalité à P_{n-1}, démontrer que la suite $(P_{n-1}(n))$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n$.

Exercice 1 – Endomorphismes non commutants

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit v un endomorphisme diagonalisable sur E avec au plus deux valeurs propres. On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{E}$ des endomorphismes $u \in \mathrm{L}(E)$ tels que $u = v \circ u + u \circ v$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\mathscr{E}$ lorsque v n'a qu'une seule valeur propre. On distinguera le cas où cette valeur propre vaut $1/2$.

   Dans toute la suite du problème, on supposera que v a exactement deux valeurs propres notées λ et μ.
3. Supposons $\mu \neq 1 - \lambda$. Montrer que tout vecteur propre de v est dans $\mathrm{Ker}(u)$. En déduire que $\mathscr{E} = \{0\}$.
4. On suppose désormais que $\lambda + \mu = 1$.
   a. Soit $u \in \mathscr{E}$. Montrer que $u(\mathrm{E}_\lambda(v)) \subset \mathrm{E}_\mu(v)$ et $u(\mathrm{E}_\mu(v)) \subset \mathrm{E}_\lambda(v)$.
   b. Réciproquement, montrer que tout endomorphisme $u \in \mathscr{E}$ vérifiant $u(\mathrm{E}_\lambda(v)) \subset \mathrm{E}_\mu(v)$ et $u(\mathrm{E}_\mu(v)) \subset \mathrm{E}_\lambda(v)$ appartient à $\mathscr{E}$.
   c. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathscr{E}$ tels que $u \circ u = u$.
   d. Montrer que $\mathscr{E}$ contient des endomorphismes u tels que $u \circ u = \mathrm{id}_E$ si et seulement si $\dim(\mathrm{E}_\lambda(v)) = \dim(\mathrm{E}_\mu(v))$.
   e. Déterminer la dimension de $\mathscr{E}$ en fonction de celles des espaces propres de v.

Exercice 2 – Produits avec la transposée

Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ telle que $A\,A^{\mathrm{T}}$ soit diagonalisable. On note $X_1, \ldots, X_m$ une base de vecteurs propres de $A\,A^{\mathrm{T}}$, telle que les r premiers vecteurs soient associés aux valeurs propres non nulles.

1. Montrer que $(A^{\mathrm{T}}X_1, \ldots, A^{\mathrm{T}}X_r)$ sont des vecteurs propres de $A^{\mathrm{T}}A$.
2. Montrer que la famille $(A^{\mathrm{T}}X_1, \ldots, A^{\mathrm{T}}X_r)$ est libre.
3. Montrer que la famille $(A^{\mathrm{T}}X_1, \ldots, A^{\mathrm{T}}X_r)$ peut être complétée en une base dans laquelle $A^{\mathrm{T}}A$ est diagonale.
4. Diagonaliser les matrices $A\,A^{\mathrm{T}}$ et $A^{\mathrm{T}}A$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Les matrices $A\,A^{\mathrm{T}}$ et $A^{\mathrm{T}}A$ ont-elles les mêmes valeurs propres ?