Logique

Les mathématiques forment un ensemble cohérent de méthodes et d'énoncés portant sur des concepts fondamentaux tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles permettent d'évaluer et comparer, d'analyser et représenter des phénomènes complexes, de résoudre des problèmes, de prévoir une évolution ou estimer une grandeur inconnue. Elles sont directement utilisées par les ingénieurs civils et militaires, pour des applications technologiques matérielles ou dans le traitement de l'information, par les chercheurs en sciences dures et en sciences humaines, par les économistes, gestionnaires et analystes financiers. Elles peuvent aussi participer de la création artistique, dans l'inspiration comme dans la réalisation d'œuvres.

Plus généralement, les mathématiques interviennent, même de façon inconsciente, dans la conception des relations, le repérage dans l'espace et dans le temps, le raisonnement logique et bien sûr dans toute activité de calcul.

L'enseignement des mathématiques vise donc non seulement à donner les bases nécessaires à la poursuite d'études scientifiques au sens large, mais aussi à assurer à chacun la compréhension de notions fondamentales pour la vie en société (nombre et opérations, ordre, figures géométrique et symétrie, variations, diagramme...)

Les principales formes du raisonnement mathématique comprennent le calcul, la démonstration, la résolution, l'analyse, la modélisation et la représentation.

Le calcul consiste en l'application de règles opératoires pour transformer une expression en une autre. Les calculs les plus simples peuvent être rédigés à l'aide d'une suite d'égalités, mais même la factorisation d'un polynôme du second degré peut nécessiter le calcul intermédiaire du discriminant voire une discussion sur son signe.

L'analyse d'un objet consiste à décrire ses propriétés parmi un ensemble de critères usuels. Ainsi, on peut étudier l'appartenance d'un nombre réel à l'un des sous-ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Pour un triangle, on peut déterminer la longueur de ses côtés et la mesure de ses angles, pour éventuellement indiquer sa nature (équilatéral, isocèle, rectangle, plat...) Pour une fonction dérivable, on cherche en général ses variations, ses éventuels zéros, ses limites aux bornes du domaine de définition voire les éventuelles asymptotes à sa courbe. Pour une série statistique, on peut calculer sa moyenne, son écart-type, sa médiane...

La représentation va comprendre essentiellement des tracés géométriques, notamment de courbes de fonctions. Mais les tableaux de variations, les histogrammes ou la construction des termes d'une suite à partir du graphe de sa fonction de récurrence sont d'autres exemples classiques.

La résolution de problèmes se présente souvent sous la forme d'une équation (ou plus généralement un prédicat) mettant en jeu une ou plusieurs inconnues. Les solutions sont les valeurs à donner aux inconnues pour obtenir une assertion vraie. Les lieux géométriques et les discussion d'un phénomène en fonction d'un paramètre rentrent dans ce cadre. Le raisonnement se fait généralement par équivalences ou par analyse-synthèse.

Une démonstration peut être demandée pour n'importe quelle assertion mathématique, c'est-à-dire une formule pouvant s'énoncer comme une phrase et dans laquelle il n'existe pas de variable libre. Il existe plusieurs méthodes classiques de démonstration et certaines assertions peuvent être démontrées de plusieurs manières différentes.

On peut citer notamment :
- la disjonction de cas ;
- la démonstration par l'absurde ;
- la démonstration par récurrence ;
- la démonstration par l'exemple ;
- la double implication, double inclusion ou double inégalité ;
- le double dénombrement...

La conjecture est la formulation d'une assertion sans démonstration, mais en accord avec certaines propriétés constatées sur des exemples.

La modélisation est plus rarement demandée en devoir, mais elle apparait souvent dans les énoncés et constitue probablement la compétence la plus importante car elle ne peut être exécutée par un logiciel. Il s'agit de traduire un phénomène réel en un objet mathématique, afin de transformer un problème concret en question mathématique. La géométrie et la théorie des probabilités amènent régulièrement à des modélisations.

L'utilisation de logiciels de représentation graphique permet de conforter les résultats obtenus à la main, ou bien pour formuler une conjecture.

Le savoir mathématique s'est construit progressivement, d'abord par accumulation de concepts et de techniques qui ont fait leur preuve. Vers le troisième siècle avant notre ère, les mathématiques de la Grèce antique développent la notion de démonstration. Il ne s'agit plus seulement de trouver la bonne réponse à un problème, il faut aussi prouver que c'est la bonne réponse. L'entreprise d'Euclide avec ses *Éléments* trouve un écho avec l'axiomatique de Hilbert à la fin du XVIIIe siècle. Aujourd'hui, la théorie de la démonstration fournit plusieurs cadres pour établir les propositions mathématiques.

1 Formules

Une formule mathématique est composée soit d'un symbole isolé (variable ou constante), soit d'un [1] opérateur relié à une ou plusieurs sous-formules par juxtaposition horizontale ou verticale, en exposant ou en indice. Chaque

1. Il y a parfois plusieurs opérateurs au même niveau dans une formule, comme dans une suite d'égalités, d'inégalités ou d'équivalences.

sous-formule peut être éventuellement encadrée par des délimiteurs (parenthèses) pour lever des ambiguïtés de lecture.

Par exemple, la formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ est composée de l'opérateur d'égalité, reliant une somme à la constante 0. L'opérateur d'addition relie la puissance $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et la constante 1. L'opérateur d'exponentiation relie la constante e et le produit $\mathrm{i}\pi$, dans lequel l'opérateur de multiplication relie les deux constantes i et π. Ici, deux opérateurs sont utilisés sans symbole propre : la multiplication par juxtaposition et l'exponentiation par mise en exposant. Mais on aurait pu les mettre en évidence en écrivant : $\mathrm{e}\hat{}(\mathrm{i} \times \pi) + 1 = 0$.

Certaines formules ont du sens, comme $1+1$ (qui vaut 2), $2+2=4$ (qui est vraie), $2>3$ (qui est fausse) ou $y=x$ (qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs de x et de y). D'autres formules n'ont pas de sens, comme $\frac{1}{0}$ ou $\sqrt{\Rightarrow}$.

Il faut distinguer ce qui est faux de ce qui n'a pas de sens. Par exemple, la phrase « mon poisson a écrit sur le soleil » est grammaticalement correcte mais elle est fausse, tandis que la phrase « poisson y pour » n'a pas de sens.

Les formules mathématiques suivent ainsi une sorte de grammaire, comme dans la langue française. Mais tandis qu'en français la grammaire s'appuie sur des distinctions entre noms, verbes, adverbes, déterminants, adjectifs et prépositions, en mathématiques la grammaire va différencier objets, opérateurs, relations, quantificateurs...

Exercice 1 Repérer les formules mathématiques du programme officiel de mathématiques et identifier les opérateurs et leurs arguments.

1.1 Objets

Il en existe plusieurs types : nombres, points, ensembles, vecteurs, fonctions, suites...

Certaines théories mathématiques permettent d'unifier tous ces types en un seul, comme la théorie des ensembles ou le lambda-calcul. Dans d'autres contextes au contraire, comme dans certains langages de programmation, les types peuvent être subdivisés. Par exemple, le langage Python distingue les entiers et les nombres à virgule flottante, donc fait une différence entre 1 et 1,0.

Parfois, un objet d'un certain type peut être considéré d'un autre type, comme lorsqu'on assimile un nombre à la fonction constante de même valeur. Mais de tels transtypages peuvent mener à des ambiguïtés de notations, il faut donc y recourir avec vigilance.

Les diverses sous-parties qui suivent détaillent les types fondamentaux mais font volontairement référence les unes aux autres. Elles font aussi référence aux opérateurs et relations qui seront décrits dans les parties suivantes, car l'objectif de ce chapitre n'est pas la construction progressive des objets mathématiques mais la présentation générale des notions utiles au raisonnement.

1.1.1 Nombres

Les nombres se conçoivent dans plusieurs ensembles de référence définis par extensions successives :

- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, qui peuvent s'écrire avec un ou plusieurs chiffres juxtaposés et servent au dénombrement de quantités discrètes ;
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, qui peuvent s'écrire avec un ou plusieurs chiffres avec éventuellement un signe préfixe et permettent de se repérer sur un axe gradué discret ;
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, qui peuvent s'écrire à l'aide d'une fraction d'entiers au dénominateur non nul et sont utiles à l'encadrement de valeurs fractionnaires, notamment avec les décimaux (dont le dénominateur est une puissance de 10) ;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, qui admettent un développement décimal fini ou infini à droite de la virgule et représentent les positions des points sur un axe continu orienté ;
- l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes, qui peuvent s'écrire à l'aide de deux réels constituant respectivement leur partie réelle et leur partie imaginaire et représentent les points d'un plan muni d'un repère.

Ces ensembles sont emboités par inclusion croissante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, c'est-à-dire que tout entier naturel est aussi un entier relatif positif, tout entier relatif est un rationnel qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction de dénominateur 1, tout rationnel est un réel avec un développement décimal fini ou périodique, tout réel est un complexe de partie imaginaire nulle.

Mais il existe des entiers strictement négatifs (-1, -2, -100...), des rationnels non entiers ($\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$...), des irrationnels ($\sqrt{2}$, π, e...) et des complexes non réels (i...)

Il existe aussi d'autres classes de nombres, qui peuvent étendre certains des ensembles précédents, par exemple en prenant en compte l'infini.

Les mesures d'angle, distance, longueur, aire et volume peuvent être assimilées à des nombres à l'aide d'une unité étalon.

1.1.2 Ensembles

Les ensembles traduisent la notion de contenant : ils sont définis par les éléments qu'ils contiennent. On dispose ainsi d'ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, mais aussi les intervalles comme $[0;1]$) d'ensembles de points (le plan, l'espace, mais aussi toutes les droites, courbes et surfaces, et plus généralement les figures), voire d'ensemble d'ensembles ($\{\{1\}, \{2\}, \{1;2\}\}$). Il y a même un ensemble qui ne contient rien du tout, c'est l'ensemble vide, noté $\varnothing$.

1.1.3 Points

Les points sont les plus petits constituants de la géométrie classique. Ils n'ont pas d'autre propriété que leur position dans un espace, mais peuvent appartenir à divers ensembles appelés figures.

1.1.4 Vecteurs

Les vecteurs proviennent de la géométrie, mais ils ne sont pas des figures : ils ne contiennent rien et n'ont pas de position dans le plan ou l'espace. Ils sont associés aux translations et interviennent plus généralement dans la notion de déplacement. En géométrie euclidienne, ils sont caractérisés par leur direction, leur sens et leur norme.

Cependant leurs combinaisons par addition et multiplication scalaire se retrouvent dans beaucoup d'objets mathématiques (nombres, fonctions, suites, polynômes) qui sont alors appelés aussi vecteurs dans le cadre de l'algèbre linéaire.

1.1.5 Fonctions et applications

Les fonctions ont une double origine, géométrique et algorithmique. Elles associent à chaque élément de leur domaine de définition une valeur dans un ensemble but. Elles sont souvent définies par une expression, dépendant d'une ou plusieurs variables, ou par un algorithme déterministe. Lorsqu'une fonction a un domaine de définition et un ensemble but inclus dans $\mathbb{R}$, elle est caractérisée par une courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Le mot « application » est préféré à celui de fonction lorsque les ensembles à la source et au but ne sont pas tous deux des ensembles de nombres, par exemple pour associer à chaque élève d'une classe sa section au baccalauréat.

En géométrie, on parle de transformation pour une application du plan (ou de l'espace) dans lui-même.

Une variable aléatoire est une application (mesurable) définie sur un espace probabilisé.

Les opérations et les relations peuvent être formalisées comme applications à une ou plusieurs variables entre ensembles.