Devoir surveillé n° 2 de mathématiques en HK BL

6 novembre 2013

Devoir en 3 heures sans calculatrice. Les résultats doivent être encadrés et chaque copie doit comporter le nom de l'élève.

Exercice 1 On arrondira les valeurs approchées à deux chiffres significatifs.

En 2010, les statistiques des salaires annuels nets pour un plein temps en France indiquent un premier décile à 13 000 €, un premier quartile à 16 000 €, une médiane à 20 000 €, un troisième quartile à 28 000 €, un neuvième décile à 40 000 €, un quatre-vingt-quinzième centile (C_{95}) à 52 000 € et un quatre-vingt-dix-neuvième centile (C_{99}) à 94 000 €.

1. Placer chacun de ces quantiles sur un axe horizontal en respectant une échelle de 1 cm pour 5 000 € et préciser la proportion de population concernée dans chaque tranche, puis représenter l'histogramme de la proportion de la population en fonction du salaire, avec une échelle de 1 cm^2 pour 5 % de la population.
   (On pourra tourner la feuille d'un quart de tour pour avoir assez de place.)
2. La France comptant environ 14 millions de salariés à temps plein, préciser le nombre approximatif de personnes dans chaque tranche salariale.
3. En supposant que dans chaque tranche de salaire, le salaire moyen est la valeur centrale, calculer la somme des salaires perçus dans chacune des tranches.
4. En déduire une valeur approchée du salaire annuel net moyen pour un temps plein en France et comparer sa valeur à celle du salaire médian.

Exercice 2

Une suite arithmétique notée (a_n) admet les valeurs suivantes : $a_7 = 10$ et $a_9 = 14$.
Calculer sa raison et son premier terme a_0.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $q_n = \dfrac{n}{2^n}$.

1. Montrer que la suite (q_n) ne s'annule pas à partir du rang 1 et qu'elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $q_{n+1} \leq \frac{3}{4} q_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}*$ on a $q_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
3. Montrer que la suite (q_n) converge en précisant sa limite.

Exercice 4

On considère une suite v définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n - 2$.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - 1$.
   Montrer que la suite (w_n) est géométrique en précisant son premier terme et sa raison.
2. Donner une expression du terme général de (w_n) et en déduire une expression du terme général de (v_n).

Exercice 5

On définit une suite u par récurrence en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n(5 - u_n)}{3}$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{2x(2-x)}{3}$ sur l'intervalle $[0; 2]$ et en déduire que cet intervalle est stable par f.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 2$ puis que la suite (u_n) est croissante.
5. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, montrer que la fonction $g_n\colon x \mapsto x^n + x - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, puis montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution α_n entre 0 et 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$.
   En déduire que $g_n(\alpha_{n+1}) \geq 0$ puis $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$.
3. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite.
4. Supposons $\ell < 1$. Montrer que la suite $(g_n(\ell))$ tend vers $\ell - 1$.
   En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ tel que $g_n(\ell) < 0$.
   Montrer que cela est contradictoire avec la définition de α_n et conclure.