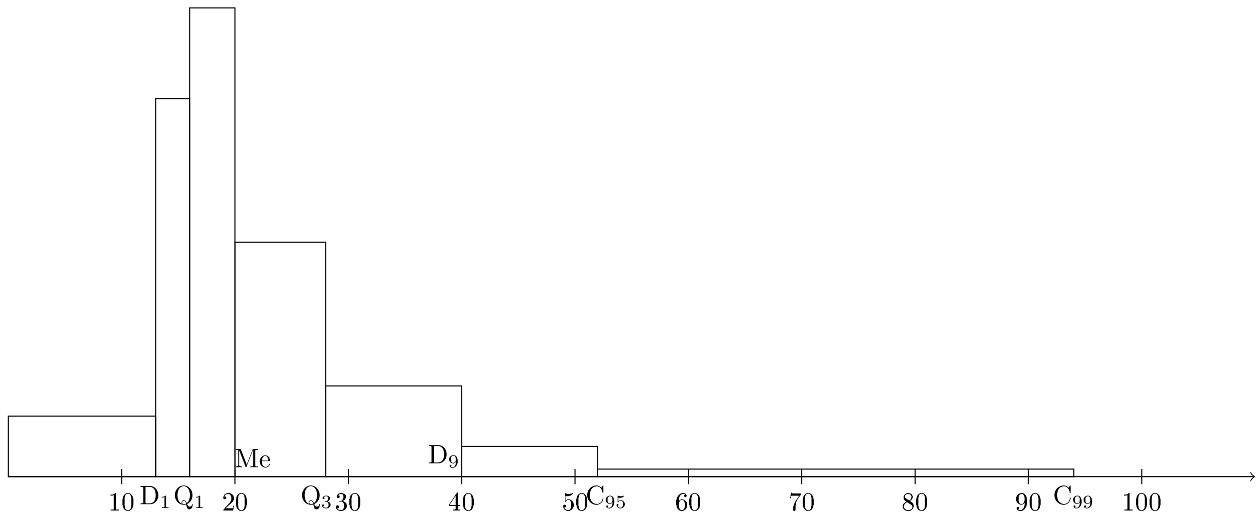
Correction du devoir surveillé n° 2 de mathématiques en HK BL

Exercice 1

1.



On trouve 10 % de la population avant le premier décile, donc on trace un rectangle de 2 cm^2 avec $2,6$ cm de base donc environ $0,8$ cm de hauteur. De même, on calcule les dimensions des autres rectangles de l'histogramme :

	intervalle en milliers d'euros	$[0;13[$	$[13;16[$	$[16;20[$	$[20;28[$	$[28;40[$	$[40;52[$	$[52;94[$
	écart en milliers d'euros	13	3	4	8	12	12	42
	largeur du rectangle en cm	2,6	0,6	0,8	1,6	2,4	2,4	8,4
	proportion de population	10 %	15 %	25 %	25 %	15 %	5 %	4 %
	aire du rectangle en cm^2	2	3	5	5	3	1	0,8
	hauteur du rectangle en cm	0,8	5	6,2	3,1	1,2	0,4	0,1
2.	nombre de personnes en millions	1,4	2,1	3,5	3,5	2,1	0,7	0,52
3.	salaire annuel moyen en milliers d'euros	6,5	14,5	18	24	34	46	73
	somme des salaires en milliards d'euros	9,1	30	63	84	71	32	38
	somme cumulée des salaires	9,1	39	102	186	257	289	327

4. On en déduit un salaire annuel moyen (calculé sur 99 % de la population) en divisant 327 milliards d'euros par 14 millions de personnes, soit environ 23 000 € par an. Il s'élève donc à 15 % de plus que le salaire médian.

Exercice 2

Une suite arithmétique a de raison r vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + nr$. En particulier, si $a_7 = 10$ et $a_9 = 14$ on en déduit $a_0 + 7r = 10$ et $a_0 + 9r = 14$ donc par soustraction, $2r = 4$ donc $r = 2$, d'où $a_0 = 10 - 7 \times 2 = -4$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q_n = \dfrac{n}{2^n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n > 0$ et $2^n > 0$ donc $q_n > 0$.

   On résout ensuite l'inéquation pour tout $n \in \mathbb{N}$: $q_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} q_n \iff \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \leq \dfrac{3n}{4 \times 2^n} \iff 2(n+1) \leq 3n \iff 2 \leq n$.

   Donc l'inégalité est vraie sur $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

2. On procède par récurrence pour montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : q_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   On a $q_0 = 0 < 1 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^0$ donc la propriété P_0 est vraie.

   On a $q_1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4}$ donc la propriété P_1 est vraie.

   On a $q_2 = \dfrac{2}{4} < \dfrac{9}{16}$ donc la propriété P_2 est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ tel que la propriété P_n soit vraie.

   On a $q_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} q_n \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$ donc la propriété P_{n+1} est vraie.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq q_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$.

Exercice 4

On a $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n - 2$ avec $w_n = v_n - 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = 3v_n - 2 - 1 = 3v_n - 3 = 3(v_n - 1) = 3w_n$.
   Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = 1$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3^n$ donc $v_n = 3^n + 1$.

Exercice 5

On a $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n(5 - u_n)}{3}$.

1. On calcule $u_1 = \dfrac{1(5-1)}{3} = \dfrac{4}{3}$ et $u_2 = \dfrac{\frac{4}{3}(5 - \frac{4}{3})}{3} = \dfrac{\frac{4}{3}\frac{11}{3}}{3} = \dfrac{44}{27}$.
2. On a $u_0 = \dfrac{27}{27}$ et $u_1 = \dfrac{36}{27}$ donc $u_0 < u_1 < u_2$ donc on conjecturer que la suite u est croissante.
3. La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{2x(2-x)}{3}$ est définie et dérivable sur $[0;2]$ et pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = \frac{4-4x}{3}$ donc on obtient les variations

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

   donc on trouve $f([0;2]) = [0;\frac{2}{3}] \subset [0;2]$ donc cet intervalle est stable par f.
4. De même on montre que la fonction $g\colon x \mapsto \frac{x(5-x)}{3}$ est croissante sur $[0;\frac{5}{2}]$ avec $g(0) = 0$ et $g(\frac{5}{2}) = \frac{25}{12} < \frac{5}{2}$ donc l'intervalle $[0;\frac{5}{2}]$ est stable par g.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.
   Or la fonction de récurrence est croissante sur cet intervalle donc la suite (u_n) est monotone avec $u_1 > u_0$, donc la suite est croissante.
5. Finalement, la suite (u_n) est croissante majorée donc converge et comme la fonction de récurrence est continue, sa limite est un point fixe de cette fonction. On résout alors par équivalences l'équation
   $g(x) = x \iff x(5-x) = 3x \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
   Or la suite (u_n) étant croissante et de premier terme strictement positif, elle ne peut converger vers 0, donc sa limite est 2.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, la fonction $g_n\colon x \mapsto x^n + x - 1$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $g_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$. Donc la fonction g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$ or la fonction g est continue donc il existe $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. Puisque la fonction g_n est strictement croissante, il n'existe pas d'autre racine positive pour g_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Pour tout $x \in [0;1]$ on a les équivalences
   $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \iff x^n + x - 1 \geq x^{n+1} + x - 1 \iff x^n - x^{n+1} \geq 0 \iff x^n(1-x) \geq 0$ ce qui est vrai par règle des signes.
   On en déduit $g_n(\alpha_{n+1}) \geq g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
   Or la fonction g_n est strictement négative sur $[0, \alpha_n]$ donc $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$.
3. D'après la question précédente, on trouve que la suite (α_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge dans $[0;1]$. On note ℓ sa limite.
4. Supposons $\ell < 1$. Alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$ donc la suite $(g_n(\ell))$ tend vers $\ell - 1$.
   Or $\ell < 1$ donc $\ell - 1 < 0$ donc il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ tel que $g_n(\ell) < 0$.
   On en déduit alors $\ell < \alpha_n$ mais la suite α est croissante donc sa limite est nécessairement supérieure à α_n, ce qui est absurde avec l'inégalité précédente.
   Finalement, on trouve $\ell \geq 1$ mais la limite de α est dans $[0;1]$ donc $\ell = 1$.