Devoir surveillé n° 1 de HK BL (25 septembre 2013)

Exercice 1 L'algorithme de Héron donne ces premières approximations de $\sqrt{7}$: $\quad 2\,;\quad \dfrac{2+\frac{7}{2}}{2}=\dfrac{11}{4}\,;\quad \dfrac{\frac{11}{4}+\frac{7}{\frac{11}{4}}}{2}$.

1. Simplifier la dernière expression puis ordonner ces quatre valeurs en justifiant chaque inégalité.
2. Justifier que la première approximation est la partie entière de $\sqrt{7}$. Cela implique en particulier que cette approximation a une précision inférieure à 1 : $\left|2-\sqrt{7}\right|<1$.
3. La deuxième approximation a-t-elle une précision inférieure à $0,1$?

Exercice 2 On pose $A=\left\{\dfrac{3n-1}{2n-7}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Les réponses doivent être justifiées.

1. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $2n-7\neq 0$.
2. Représenter quelques points de A sur un axe orienté.
3. Quel est l'ensemble B des entiers naturels n vérifiant $\dfrac{3n-1}{2n-7}>0$?

   En déduire que A admet un minimum et préciser ce minimum.
4. Montrer que l'ensemble A est majoré par 11. Est-ce sa borne supérieure ?

Exercice 3 On considère la fonction d'une variable réelle définie par $f\colon x\mapsto 2x-\sqrt{5x^2-8x+4}$

1. Déterminer le signe de l'expression $5x^2-8x+4$ en fonction de x.
2. En déduire le domaine de définition D_f de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des réels pour lesquels son expression a un sens.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_-$ on a $f(x)<0$.
4. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x)=0$ est équivalente à l'équation $0=x^2-8x+4$.
5. En déduire les points d'annulation de la fonction f.
6. Montrer que la fonction f admet une dérivée qui s'écrit pour tout $x\in\mathrm{D}_f$: $f'(x)=2-\dfrac{5x-4}{\sqrt{5x^2-8x+4}}$.
7. Déterminer les points d'annulation de la dérivée f'.
8. Déterminer le signe de f' et le sens de variation de f.

Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 L'algorithme de Héron donne ces premières approximations de $\sqrt{5}$: $\quad 2\,;\quad \dfrac{2+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{9}{4}\,;\quad \dfrac{\frac{9}{4}+\frac{5}{\frac{9}{4}}}{2}$.

1. Simplifier la dernière expression puis ordonner ces quatre valeurs en justifiant chaque inégalité.
2. Justifier que la première approximation est la partie entière de $\sqrt{5}$. Cela implique en particulier que cette approximation a une précision inférieure à 1 : $\left|2-\sqrt{5}\right|<1$.
3. La deuxième approximation a-t-elle une précision inférieure à $0,1$?

Exercice 2 On pose $A=\left\{\dfrac{4n-3}{5-2n}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Les réponses doivent être justifiées.

1. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $5-2n\neq 0$.
2. Représenter quelques points de A sur un axe orienté.
3. Quel est l'ensemble B des entiers naturels n vérifiant $\dfrac{4n-3}{5-2n}<0$?

   En déduire que A admet un maximum et préciser ce maximum.
4. Montrer que l'ensemble A est minoré par -9. Est-ce sa borne inférieure ?

Exercice 3 On considère la fonction d'une variable réelle définie par $f\colon x\mapsto \sqrt{6x^2+5x+4}+4x$

1. Déterminer le signe de l'expression $6x^2+5x+4$ en fonction de x.
2. En déduire le domaine de définition D_f de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des réels pour lesquels son expression a un sens.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $f(x)>0$.
4. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_-$ l'équation $f(x)=0$ est équivalente à l'équation $10x^2-5x-4=0$.
5. En déduire les points d'annulation de la fonction f.
6. Montrer que la fonction f admet une dérivée qui s'écrit pour tout $x\in\mathrm{D}_f$: $f'(x)=\dfrac{6x-\frac{5}{2}}{\sqrt{6x^2+5x+4}}+4$.
7. Déterminer les points d'annulation de la dérivée f'.
8. Déterminer le signe de f' et le sens de variation de f.