Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 1. On calcule $\dfrac{\frac{11}{4}+\frac{7}{\frac{11}{4}}}{2}=\dfrac{\frac{11}{4}+\frac{28}{11}}{2}=\dfrac{\frac{121}{44}+\frac{112}{44}}{4}=\dfrac{233}{88}$.

On a d'abord $2=\dfrac{176}{88}$ et $\dfrac{11}{4}=\dfrac{242}{88}$ donc on trouve $2<\dfrac{233}{88}<\dfrac{11}{4}$.

On a ensuite $4<7$ donc $2<\sqrt{7}$.

Enfin on procède par équivalences : $\sqrt{7}<\frac{233}{88} \iff 7<\frac{233^2}{88^2} \iff 7\times 88^2<233^2$ avec $7\times 88^2=7\times 7744=54208$ et $233^2=46600+6990+699=54289$.

On obtient donc les inégalités $2<\sqrt{7}<\dfrac{233}{88}<\dfrac{11}{4}$.

2. Le nombre 2 est bien un entier inférieur à $\sqrt{7}$ mais on a $9>7$ donc $3>\sqrt{7}$, d'où $2=\mathrm{E}(\sqrt{7})$.
3. On procède par équivalences :
$\left|\dfrac{11}{4}-\sqrt{7}\right|<0,1 \iff \dfrac{11}{4}-\sqrt{7}<\dfrac{1}{10} \iff \dfrac{55-2}{20}<\sqrt{7} \iff \dfrac{53^2}{400}<7 \iff 2809<2800$, ce qui est faux.
Donc la deuxième approximation a une précision supérieure à $0,1$.

Exercice 2 On pose $A=\left\{\dfrac{3n-1}{2n-7}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Les réponses doivent être justifiées.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a les équivalences $2n-7=0 \iff n=\frac{7}{2}$ or $\frac{7}{2}$ n'est pas un entier naturel, donc l'expression $2n-7$ ne s'annule pas pour $n\in\mathbb{N}$.
2. On calcule $\frac{0-1}{0-7}=\frac{1}{7}$, $\quad \frac{3-1}{2-7}=\frac{-2}{5}$, $\quad \frac{6-1}{4-7}=\frac{-5}{3}$, $\quad \frac{9-1}{6-7}=-8$, $\quad \frac{12-1}{8-7}=11$.
3. On détermine le signe de $\dfrac{3n-1}{2n-7}>0$ à l'aide d'un tableau de signe.

n	0	$1\dots 3$	$4\dots{+\infty}$
$3n-1$	$-$	$+$	$+$
$2n-7$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3n-1}{2n-7}$	$+$	$-$	$+$

On obtient donc $B=\mathbb{N}\setminus\{1;2;3\}$.
Le seules valeurs négatives de A sont donc $\frac{-2}{5}$, $\frac{-5}{3}$ et -8. Donc -8 est le minimum de A.

4. Pour tout $n\geq 4$ on vérifie par équivalences : $\dfrac{3n-1}{2n-7}\leq 11 \iff 3n-1\leq 22n-77 \iff 76\leq 19n \iff n\geq 4$, ce qui est vrai.
Ce majorant étant un élément de A, c'est le maximum de A donc également sa borne supérieure.

Exercice 3 On considère la fonction d'une variable réelle définie par $f\colon x\mapsto 2x-\sqrt{5x^2-8x+4}$

1. Le signe de l'expression du second degré $5x^2-8x+4$ peut se trouver à l'aide du discriminant $\Delta=64-4\times 20=-16<0$.
L'expression est donc toujours du signe du coefficient 5 donc elle est strictement positive pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. On trouve donc $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}_-$ on a $2x\leq 0$ et $-\sqrt{5x^2-8x+4}<0$ donc $f(x)<0$.
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a les équivalences
$f(x)=0 \iff 2x=\sqrt{5x^2-8x+4} \iff 4x^2=5x^2-8x+4 \iff x^2-8x+4=0$.
5. Le discriminant de l'équation précédente s'écrivant $64-16=48$, on en déduit ses deux racines $x_1=\frac{8-\sqrt{48}}{2}=4-2\sqrt{3}$ et $x_2=4+2\sqrt{3}$.
6. La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables, la deuxième s'écrivant $\sqrt{u}$ où $u\colon x\mapsto 5x^2-8x+4$ donc $f'=2-\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\colon x\mapsto 2-\dfrac{10x-8}{2\sqrt{5x^2-8x+4}}=2-\dfrac{5x-4}{\sqrt{5x^2-8x+4}}$.
7. Les points d'annulation de f' sont les solutions de l'équation $5x-4=2\sqrt{5x^2-8x+4}$ qui vérifient nécessairement la condition $5x-4\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq\frac{4}{5}$.
Pour tout $x\in\left[\frac{4}{5},+\infty\right[$, on a les équivalences :
$$f'(x)=0 \iff (5x-4)^2=4(5x^2-8x+4) \iff 25x^2-40x+16=20x^2-32x+16 \iff 5x^2-8x=0$$
$$\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{8}{5}.$$
Seule la racine $\frac{8}{5}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{5},+\infty\right[$ donc c'est le seul point d'annulation de f'.
8. On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}$:
$f'(x)>0 \iff 2>\dfrac{5x-4}{\sqrt{5x^2-8x+4}} \iff 2\sqrt{5x^2-8x+4}>5x-4$ ce qui sera vrai sur $\left]-\infty;\frac{4}{5}\right[$.
Elle se réécrit pour tout $x\in\left[\frac{4}{5};+\infty\right[$:
$4(5x^2-8x+4)>(5x-4)^2 \iff 20x^2-32x+16>25x^2-40x+16 \iff 0>5x^2-8x$.
Or cette expression du second degré est négative entre ses racines 0 et $\frac{8}{5}$ donc elle sera négative sur $\left[\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right]$ et positive sur $\left[\frac{8}{5};+\infty\right[$.
Finalement, la fonction f est décroissante stricte sur $\left]-\infty;\frac{8}{5}\right]$ et croissante stricte sur $\left[\frac{8}{5};+\infty\right[$.