Devoir non surveillé n$^{\circ}$ 4 de HK BL (9 décembre 2013)

Exercice 1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $x_0 \in \,]a,b[$. On définit la fonction $\phi\colon x \mapsto f(x) - \dfrac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(x-a)(x-b)$ sur $[a,b]$.

1. Calculer $\phi(a)$, $\phi(b)$ et $\phi(x_0)$, puis montrer que la fonction ϕ est deux fois dérivable.
2. Montrer que la dérivée de ϕ admet au moins deux points d'annulation sur $[a,b]$.
3. En déduire qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\phi''(c) = 0$.

Exercice 2 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \mathrm{e}^{-xf(x)}$ et $f(0) = 0$.
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = (g(x))^2$.

1. Montrer que la fonction g est dérivable et que pour tout x réel, on a $g'(x)$ du même signe que $-xg(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction h.
3. En déduire que la fonction f est impaire.

Exercice 3

1. Étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1,+\infty[$ puis montrer que pour tout réel $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $t \leq n$ on a $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$.
3. Étudier les variations de la fonction $h\colon t \mapsto t + n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)$ sur $[0,\sqrt{n}]$.
4. En déduire que pour tout $t \in [0,\sqrt{n}]$ on a $\mathrm{e}^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq \dfrac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$.