Devoir non surveillé n° 3 de HK BL pour le 5 novembre 2013

Exercice 1 : Suite implicite

A. **Approximation d'un terme**

1) Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que cette solution (notée α) appartient à l'intervalle $]1;2[$.
2) En posant $f\colon x \mapsto x^3 - x - 1$, montrer que la dérivée f' ne s'annule pas sur $[1;2]$.
3) On pose $I = [\alpha, 2]$ et pour tout $x \in I$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   Construire le tableau de variations de g sur $[\alpha, 2]$ et en déduire que l'intervalle I est stable par g.
4) Pour obtenir des approximations de α, on définit une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$.
5) Montrer que la suite (u_n) est décroissante minorée. En déduire que (u_n) converge et que sa limite est α.

B. **Comportement de la suite**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, établir les variations de la fonction $f_n\colon x \mapsto x^n - x - 1$ et montrer que l'équation $x^n - x - 1 = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $\alpha_n \in]1;2[$.
2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que pour tout $x \in [1;2]$ on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
   En déduire que $f_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$ puis $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.
3) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite.
4) Supposons $\ell > 1$. Montrer que la suite $(f_n(\ell))$ tend vers $+\infty$.
   En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ tel que $f_n(\ell) > 0$ puis $f_n(\alpha_n) > 0$. Conclure.

Exercice 2 : Fonction exponentielle

A. **Inégalité de Bernoulli**

1) Pour tout $X \in [-1; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'inégalité $(1 + X)^n \geq 1 + nX$.
2) En déduire pour tout $X \in]-\infty; 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'inégalité $(1 - X)^n \geq 1 - nX$.

B. **Composition des accroissements infinitésimaux**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$ on a $u_n > 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$. Montrer l'égalité $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$.
3) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > |x|$ et pour tout $n > N$, $\quad \dfrac{x}{(n+1)(n+x)} < 1$.
   En déduire pour tout $n > N$ l'inégalité $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{n+x}\right)$.
4) En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang N.
5) Justifier de même que la suite (v_n) est croissante et strictement positive à partir du rang N.
6) En déduire que la suite $(u_n v_n)$ est croissante et strictement positive à partir du rang N.
7) Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est majorée par 1. En déduire qu'elle converge.
8) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.