Correction du devoir non surveillé n° 1

Exercice 1 Résoudre l'inéquation $\sqrt{3-x}+1 \leq 2x-5$ dans $\mathbb{R}$.

L'inéquation n'a de sens que si $3-x \geq 0$ c'est-à-dire sur $]-\infty;3]$.

On raisonne ensuite par équivalences pour tout $x \in]-\infty;3]$: $\sqrt{3-x}+1 \leq 2x-5 \iff \sqrt{3-x} \leq 2x-6$.

Cette inéquation implique $2x-6 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 3$, donc il n'y a pas de solution sur $]-\infty;3[$.

La seule solution possible est donc 3 et on vérifie $\sqrt{3-3}+1 = 1 = 2\times 3-5$ donc 3 est la seule solution de l'équation.

Exercice 2 Résoudre l'inéquation $x-3+\frac{2}{x} \leq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On raisonne par équivalences : $x-3+\frac{2}{x} \leq 0 \iff \frac{x^2-3x+2}{x} \leq 0$.

Or le numérateur du second degré a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$ donc il a deux racines qui sont $\frac{3-1}{2} = 1$ et $\frac{3+1}{2} = 2$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x^2-3x+2}{x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation s'écrit $S =]-\infty;0[\cup [1;2]$.

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{5-3x}{2x-1} \leq \frac{2x-1}{5-3x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right\}$, on raisonne par équivalences :

$$\frac{5-3x}{2x-1} \leq \frac{2x-1}{5-3x} \iff \frac{(5-3x)^2-(2x-1)^2}{(5-3x)(2x-1)} \leq 0 \iff \frac{(5-3x-2x+1)(5-3x+2x-1)}{(5-3x)(2x-1)} \leq 0$$
$$\iff \frac{(6-5x)(4-x)}{(5-3x)(2x-1)} \leq 0$$

On a les inégalités suivantes : $\frac{1}{2} < \frac{6}{5} < \frac{5}{3} < 4$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{5}{3}$		4		$+\infty$
$6-5x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$4-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$5-3x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{(6-5x)(4-x)}{(5-3x)(2x-1)}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Finalement, l'ensemble solution est $S = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{6}{5};\frac{5}{3}\right[\cup [4;+\infty[$.