Concours blanc n° 1 en mathématiques en HK BL

25 novembre 2013

Devoir en 3 heures sans calculatrice. Les résultats doivent être encadrés et chaque copie doit comporter le nom de l'élève.

Exercice 1 Croissance linéaire

Le relevé journalier de la taille d'un bambou *Phyllostachys Aureosulcata Spectabilis* suit approximativement une progression arithmétique. Une pousse mesure 1 m au seizième jour et 2 m au vingt-et-unième jour. Quelle est la raison journalière de cette progression ? Quand le bambou devrait-il atteindre sa taille finale de 7,2 mètres ?

Avant le seizième jour, l'évolution de la taille suit plutôt une progression géométrique. La pousse mesurant 50 cm au douzième jour, calculer la raison journalière de cette progression et en déduire la taille de la pousse au huitième et au quatorzième jour.

Représenter l'évolution de la taille du bambou sur un graphique. On pourra prendre 1 cm ou 1 carreau pour 2 jours en abscisse et autant pour 1 mètre en ordonnée. Une dizaine de points également répartis suffiront.

Exercice 2 Une association compte 156 adhérents et 48 membres non adhérents appelés *observateurs*.

1. Si 8 observateurs changent de statut et deviennent adhérents, calculer le taux d'évolution du nombre d'adhérents et celui du nombre d'observateurs.
2. Calculer aussi la proportion d'adhérents avant et après le changement.
   L'évolution de la *proportion* d'adhérents correspond-elle à l'évolution du *nombre* d'adhérents ?
3. Sans apport de nouveaux adhérents, l'association reçoit 12 observateurs supplémentaires. Calculer l'évolution de la proportion d'adhérents.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

Partie A : Étude de fonction

1. Déterminer les variations de f sur son domaine de définition.
2. Calculer ses limites en $\frac{1}{2}$ et en $+\infty$.
3. Montrer que la courbe représentative de f admet des asymptotes en $\frac{1}{2}$ et en $+\infty$.
4. Montrer que l'intervalle $[1; 2]$ est stable par f.

Partie B : Suite récurrente On définit une suite (b_n) par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite (notée Φ).
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - \Phi \leq \dfrac{1}{2}(u_n - \Phi)^2$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq u_n - \Phi \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$.
6. En déduire que u_3 est une approximation de Φ à 10^{-4} près et en donner une expression sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 4 Déterminer le domaine de définition, les variations, le signe et les limites aux bornes du domaine pour la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{4}{1-\sqrt{2x^2-3}}$ et tracer sa courbe représentative en précisant les droites asymptotes.

Exercice 5 Le nombre d'enfants par âge au sein des familles en France en 2010 est résumé par le tableau ci-dessous :

Âge	moins de 3 ans	3 à 5 ans	6 à 10 ans	11 à 17 ans	18 à 24 ans	25 ans ou plus
Nombre d'enfants	2 064 559	1 991 851	3 197 026	4 106 398	2 0990 222	809 155

1. Représenter ces nombres d'enfants sur un histogramme en fixant 5 mm (ou 1 carreau) par an en abscisse et 1 cm^2 (ou un carreau) pour 100 000 enfants pour la construction des rectangles.
   Commenter la variation des hauteurs de rectangles en fonction de l'âge.
2. Sur le même graphique, à l'aide d'un axe vertical gradué selon une échelle de 1 cm (ou un carreau) pour un million d'enfants, représenter la courbe polygonale des effectifs cumulés. *On procèdera aux arrondis pertinents pour éviter des calculs inutiles.*
3. Déterminer l'âge médian des enfants vivant dans des familles en France en 2010.
4. Préciser les valeurs centrales de chaque tranche d'âge et calculer l'âge moyen des enfants en ne prenant en compte que ceux de moins de 25 ans.

Exercice 6 On définit la fonction $h\colon x \mapsto \dfrac{5x+8}{3x+7}$.

1. Montrer que la fonction h est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que cet intervalle est stable par h.
2. En déduire qu'en posant $p_0 = 0$ et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = h(p_n)$ on définit une suite positive.
   Calculer p_1 et p_2.
3. Montrer que la fonction h admet un unique point fixe négatif que l'on notera α.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = p_n - \alpha$. Montrer que la suite (q_n) ne s'annule pas et que son inverse $(r_n) = (\frac{1}{q_n})$ vérifie la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = \dfrac{3+r_n}{11}$.
5. Montrer que l'équation $x = \dfrac{3+x}{11}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera β.
6. Montrer que la suite $(s_n) = (r_n - \beta)$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
7. En déduire les expressions du terme général pour les suites (s_n), (r_n), (q_n) et (p_n).
8. Préciser les limites éventuelles de ces quatre suites.

Exercice 7 : Moyenne arithmético-géométrique

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$ on a $x < \sqrt{xy} < \dfrac{x+y}{2} < y$ et $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} < \dfrac{y-x}{2}$.
2. On fixe $v_0 = 1$ et $w_0 = 2$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}$ et $w_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n \leq v_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_n = w_n - v_n$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\delta_n$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\delta_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.
4. En déduire que les suites v et w sont adjacentes et conclure.

Exercice 8 On considère la fonction $a\colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Partie A : Étude de fonction

1. Préciser le domaine de définition de la fonction a.
   Montrer qu'elle est strictement positive et que sa dérivée vérifie pour tout $x \in]-1;1[$, $a'(x) = x(a(x))^3$.
2. En déduire les variations de a et montrer qu'elle tend vers $+\infty$ en 1.
3. Représenter graphiquement la courbe de a en précisant ses asymptotes.

Partie B : Somme de Riemann Soit $x \in]0;1[$.

On définit deux suites (S_n) et T_n par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} a\left(\frac{kx}{2^n}\right)$ et $T_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} a\left(\frac{kx}{2^n}\right)$.

1. Montrer que la différence $(T_n - S_n)$ tend vers 0.
2. En séparant termes de rang pair et termes de rang impair sous le symbole somme, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{i=0}^{2^n}\left(a\left(\frac{(2i+1)x}{2^n}\right) - a\left(\frac{2ix}{2^n}\right)\right)$.
3. En déduire que la suite (S_n) est croissante.
4. Montrer de même que la suite (T_n) est décroissante.
5. Justifier que (S_n) converge.